Ueber die Darstellung von reellen räumlichen Projektivitäten durch Produkte von Spiegelungen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt von

Walter Gensch

aus **Neu-Stuer.**

Rostock

Druck: 1559 E ROSTOCK Adlers Erben G. m. b. H., Rats- und Universitäts-Buchdruckerei und Verlagsanstalt

1935.

Referent: Prof. Dr. Furch

Tag der mündl. Prüfung: 30. Juli 1934

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhaltsverzeichnis.

§ 1: Die involutorischen Elemente der räumlichen projektiven Gruppe 4
§ 2: Notwendige Bedingungen für die Ersetzbarkeit einer Projektivität durch Produkte von Spiegelungen . . . 5
§ 3: Das Produkt einer Ebenenspiegelung und einer Geradenspiegelung 7
§ 4: Das Produkt von zwei Geradenspiegelungen 8
§ 5: Das Produkt von zwei Ebenenspiegelungen 9
§ 6: Das Produkt von drei Ebenenspiegelungen 9
§ 7: Die Ersetzbarkeit der allgemeinen Projektivität mit negativer Determinante 10
§ 8: Die Ersetzbarkeit der allgemeinen Projektivität mit positiver Determinante 10
Anhang 10

In der Gruppe der ebenen und räumlichen kongruenten Abbildungen ist jedes Element durch ein Produkt von zwei involutorischen Elementen ersetzbar. In der Gruppe der ebenen projektiven Abbildungen ist es etwas besonderes, wenn sich ein Element als Produkt von zwei involutorischen Elementen darstellen läßt. Jedes Element dieser Gruppe ist aber durch ein Produkt von drei involutorischen Elementen ersetzbar[1]). Es soll nun die Ersetzbarkeit der Elemente der räumlichen projektiven Gruppe durch Produkte von Spiegelungen untersucht werden.

§ 1: Die involutorischen Elemente der räumlichen projektiven Gruppe.

Die proj. Abbildung: $y^i = \Sigma a^i_k x^k$ (i, k = 1 . . 4) werde stets so normiert, daß: $|a^i_k| = \pm 1$ ist und alle a^i_k reell sind. Wird mit A^i_k die Unterdeterminante von a^i_k in $|a^i_k|$ bezeichnet, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Involution: $a^i_k = \lambda A^k_i$. Daraus folgt: $|a^i_k| = \lambda^4 |A^i_k| = \lambda^4 |a^i_k|^3$ und $\lambda^4 = 1$. Da alle a^i_k reell sein sollen, sind nur die Lösungen: $\lambda = \pm 1$ möglich. Man erhält also für die räumlichen Involutionen 4 Fälle: $|a^i_k| = \pm 1$, $a^i_k = \pm A^k_i$.

Durch Einführung eines geeigneten Koordinatensystems[2]) lassen sich die Fixelemente und die Art der Abbildung bei den verschiedenen Involutionen bestimmen:

(a) . . $|a^i_k| = 1$, $a^i_k = A^k_i$: Zwei windschiefe reelle Geraden, die Punkt für Punkt fest bleiben.

(b) . . $|a^i_k| = 1$, $a^i_k = -A^k_i$: Wie bei (a), aber die Geraden sind konjugiert komplex.

(c) $|a^i_k| = -1$; $a^i_k = -A^k_i$: Eine Ebene aus Fixpunkten und ein nicht mit ihr inzidierender Fixpunkt, das Zentrum der Involution.

(d) $|a^i_k| = -1$; $a^i_k = A^k_i$: Keine reelle Abbildung.

Die Involutionen vom Typ (a) und (b), die Geradenspiegelungen, werden im Falle (a) mit $\alpha, \beta \ldots$ und im Falle (b) mit $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \ldots$ bezeichnet. Für die Involutionen unter (c), die Ebenenspiegelungen, werden die Symbole a, b . . . eingeführt.

Bei den Geradenspiegelungen ist derjenige Punkt das Bild Y eines Originals X, welcher auf der Transversalen durch X und den beiden Fixgeraden liegt und zugleich der 4. harmonische

[1]) Vgl. G. Thomsen: Grundl. d. Elementargeometrie.
[2]) Vgl. Heffter: Lehrb. d. analyt. Geometrie, Bd. II, S. 117.

Punkt zu X in bezug auf die Schnittpunkte der Transversalen mit den Fixgeraden ist. Der analytische Ausdruck einer Involution α mit 2 reellen Fixgeraden, die je durch 2 Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ gegeben sind, lautet:

$$(1)\ldots Y = \frac{|X\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}|}{|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}|}\mathfrak{A} + \frac{|\mathfrak{A}\mathfrak{B}X\mathfrak{D}|}{|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}|}\mathfrak{C} - \frac{|\mathfrak{A}X\mathfrak{C}\mathfrak{D}|}{|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}|}\mathfrak{B} - \frac{|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}X|}{|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}|}\mathfrak{D}$$

Die Involution mit 2 komplexen Fixgeraden, die je durch 2 Punkte $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}i$, $\mathfrak{C}+\mathfrak{D}i$ und $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}i$, $\mathfrak{C}-\mathfrak{D}i$ gegeben sind, lautet:

$$(2)\ldots Y = \frac{|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}X|}{|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}|}\mathfrak{C} + \frac{|\mathfrak{A}X\mathfrak{C}\mathfrak{D}|}{|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}|}\mathfrak{A} - \frac{|X\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}|}{|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}|}\mathfrak{B} - \frac{|\mathfrak{A}\mathfrak{B}X\mathfrak{D}|}{|\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}|}\mathfrak{D}$$

Bei den Ebenenspiegelungen ist derjenige Punkt das Bild Y eines Originals X, welcher auf der Verbindungslinie des Zentrums mit dem Original liegt und zugleich 4. harmonischer Punkt zu X in bezug auf das Zentrum und den Durchstoßpunkt der Verbindungsgeraden XY durch die Ebene der Fixpunkte ist. Bezeichnet man das Zentrum mit $\mathfrak{A}$ und die Ebene der Fixpunkte mit $\mathfrak{a}$, so lautet der analytische Ausdruck einer Ebenenspiegelung:

$$(3)\ldots\ldots\ldots Y = 2\frac{(X\mathfrak{a})}{(\mathfrak{A}\mathfrak{a})}\mathfrak{A} - X$$

Sind A_{ik}^{ik} die Hauptunterdeterminanten 2. Stufe aus der Matrix einer projektiven Abbildung, so folgt für die Ebenenspiegelung aus (3):

(4) . . . $A_{ik}^{ik} + A_{lm}^{lm} = 0$ i, k, l, m verschieden.

Durch spezielle Wahl des Koordinatensystems: $\mathfrak{A} = 1000$, $\mathfrak{B} = 0100$, $\mathfrak{C} = 0010$, $\mathfrak{D} = 0001$, $\mathfrak{a} = 1000$ erhält man für die Involutionen die Matrizen:

$$(5)\ldots \alpha = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix};\quad (6)\ldots \bar{\alpha} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ -1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&-1&0 \end{pmatrix};\quad (7)\ldots a = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$$

Die Ebenenspiegelungen sollen stets so normiert sein, daß die Summe der Elemente der Hauptdiagonale ihrer Matrix kleiner als Null ist.

§ 2: Notwendige Bedingungen für die Ersetzbarkeit einer Projektivität durch Produkte von Spiegelungen.

Notwendige Bedingungen ergeben sich in Form von Relationen zwischen den Invarianten:

$$I = \Sigma a_i^i,\quad K = \Sigma a_k^i\, a_i^k,\quad L = \Sigma a_k^i\, a_l^k\, a_i^l$$

der Projektivität. Durch Rechnung lassen sich leicht die Identitäten:

(1) . . $2L + I^3 - 3KI = 6 \Sigma A_i^i$; (2) . . $I^2 - K = 2 \Sigma A_{ik}^{ik}$ $(i<k)$ bestätigen. Die charakteristische Gleichung der Projektivität geht über in:

(3) . . $\lambda^4 - \lambda^3 I + \lambda^2 \frac{I^2 - K}{2} - \lambda \frac{2L + I^3 - 3KI}{6} \pm 1 = 0.$

Die Invarianten einer Projektivität, die durch ein Produkt einer Ebenenspiegelung b und einer Geradenspiegelung a bez. $\underline{a}$ ersetzbar ist, müssen notwendig den Relationen genügen:

I. . . $2L + I^3 - 3KI + 6I = 0$ bezw. II . . $2L + I^3 - 3KI - 6I = 0$
$K - I^2 = 0$ $K - I^2 = 0$

Beweis: Die Spiegelung a wird in der Form (5) § 1 angesetzt und $b = (b_k^i)$ mit $|b_k^i| = -1$ und $b_k^i = -B_i^k$. Ist $a = a\,b$, so gilt:

(4) . . . . $a_k^i = (-1)^{i+1} b_k^i$.

Also: $a_i^i = (-1)^{i+1} b_i^i = -(-1)^{i+1} B_i^i = -\mathfrak{A}_i^i$, wobei $\mathfrak{A}_i^i$ die Unterdeterminante von a_k^i in $|a_k^i|$ ist. Aus $\Sigma a_i^i = -\Sigma \mathfrak{A}_i^i$ folgt aber nach (1): $2L + I^3 - 3KI + 6I = 0$. Nach (4) § 1 gilt: $B_{ik}^{ik} + B_{lm}^{lm} = 0$ (i, k, l, m verschieden). Daraus folgt wegen (4) § 2: $\mathfrak{A}_{ik}^{ik} + \mathfrak{A}_{lm}^{lm} = 0$ (i, k, l, m, verschieden), d. h. $\Sigma \mathfrak{A}_{ik}^{ik} = 0$ $(i<k)$ und nach (2): $K - I^2 = 0$.

Analog verlaufen die Beweise für die Relationen II, III, IV und V.

Die Invarianten einer Projektivität, die durch ein Produkt von 2 Geradenspiegelungen a, β oder $\bar{a}$, $\bar{\beta}$ bezw. a, $\bar{\beta}$ ersetzbar ist, müssen notwendig der Relation genügen:

III . . $2L + I^3 - 3KI - 6I = 0$ bezw. IV . . $2L + I^3 - 3KI + 6I = 0$

Die Invarianten einer Projektivität, die durch ein Produkt von 2 Ebenenspiegelungen ersetzbar ist, müssen notwendig den Relationen genügen:

V . . . . . $2L + I^3 - 3KI - 6I = 0$
$K - I^2 + 4I - 4 = 0$

Die Invarianten einer Projektivität, die durch ein Produkt von 3 Ebenenspiegelungen ersetzbar ist, müssen notwendig der Relation genügen:

VI . . . . . $2L + I^3 - 3KI + 6I - 3(K - I^2) = 0$

Beweis: Man setzt die drei Ebenenspiegelungen gemäß (3) § 1 an und legt das Koordinatensystem so, daß die Produktmatrix eine möglichst einfache Gestalt annimmt.

Die Relationen I, II und IV sind unabhängig von der Reihenfolge der Multiplikation.

§ 3: Das Produkt einer Ebenenspiegelung und einer Geradenspiegelung.

Notwendig und hinreichend dafür, daß sich eine Projektivität mit negativer Determinante als Produkt einer Ebenenspiegelung b und einer Geradenspiegelung a bezw. $\bar{a}$ darstellen läßt, ist das Bestehen der Relationen I bezw. II des § 2 für ihre Invarianten.

Beweis: Die charakteristische Gleichung (3) § 2 lautet, wenn die Bedingungen I § 2 vorausgesetzt werden: $\lambda^4 - \lambda^3 I + \lambda I - 1 = 0$. Die Lösungen sind: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 \cdot \lambda_4 = 1$. Von den Typen aller Projektivitäten[3]) können die charakteristischen Wurzeln von (1), (4), (8), (12), (18) solche Werte annehmen. Jeder dieser durch die Gültigkeit der Relationen I § 2 spezialisierte Typ läßt sich durch ein Produkt ab und $a\beta$ ersetzen. Setzt man die Gleichungen II des § 2 voraus, so hat man die charakteristische Gleichung: $\lambda^4 - \lambda^3 I - \lambda I - 1 = 0$, deren Lösungen: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 \cdot \lambda_4 = -1$ sind. Nur Typ (8) kann diese Wurzeln haben und ist dann als Produkt $\bar{a}b$ und $a\bar{\beta}$ darstellbar. Nach § 2 sind die Relationen I und II notwendig für die Ersetzbarkeit.

Eine andere Kennzeichnung dieser Projektivitäten: Die proj. Abbildungen mit negativer Determinante, welche sich als Produkt einer Ebenenspiegelung und einer Geradenspiegelung a oder $\bar{a}$ darstellen lassen, sind dadurch ausgezeichnet, daß sie entweder eine nicht entartete Fläche 2. Ordnung invariant lassen oder transformierte Umlegungen an Ebenen sind.

Beweis: Läßt eine Projektivität mit negativer Determinante eine nicht entartete Fläche 2. Ordnung invariant, so folgt für ihre Invarianten notwendig entweder die Relation I § 2 oder die Relation II § 2, d. h. aus der Invarianz folgt die Ersetzbarkeit der Projektivität entweder durch ab und $a\beta$ oder $\bar{a}b$ und $a\bar{\beta}$. Die Matrix einer Umlegung an einer Ebene läßt sich auf die Form des Typs (12) bringen und ist daher als ab und $a\beta$ darstellbar. Umgekehrt lassen aber auch die ersetzbaren Typen (1), (4), (8), (18)

[3]) Vgl. Anhang.

eine nicht entartete Fläche 2. Ordnung invariant, während der Typ (12) eine Umlegung an einer Ebene ist.

§ 4: Das Produkt von zwei Geradenspiegelungen.

Die charakteristische Gleichung (3) in § 2 einer Projektivität mit positiver Determinante geht unter Voraussetzung der Relation III bezw. IV in § 2 über in: $\lambda^4 - \lambda^3 I - \lambda^2 \frac{K - I^2}{2} - \lambda I + 1 = 0$ bezw. $\lambda^4 - \lambda^3 I + \lambda^2 \frac{I^2 - K}{2} + \lambda I + 1 = 0$. Die Lösungen genügen den Bedingungen: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$ $\lambda_3 \cdot \lambda_4 = 1$ bezw. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$; $\lambda_3 \cdot \lambda_4 = -1$. Den beiden ersten Gleichungen können die charakteristischen Wurzeln aller Typen von Projektivitäten mit Ausnahme von (4), (12), (18) genügen, den beiden letzten die Wurzeln von (1), (3), (6), (7), (11), (15) und (17). Diese durch die Gültigkeit der Relationen III bezw. IV spezialisierten Typen sind mit Ausnahme von:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \end{pmatrix} \quad a^2 \neq 1 \qquad \text{bezw.} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/a \end{pmatrix}$$

durch ein Produkt $\alpha\beta$ bezw. $\bar{\alpha}\beta$ und $\alpha\bar{\beta}$ ersetzbar. Die Invariantenrelationen III bezw. IV sind also nicht hinreichend.

Die Projektivitäten mit positiver Determinante, die durch ein Produkt von 2 Geradenspiegelungen ersetzt werden können, sind dadurch gekennzeichnet, daß sie entweder eine nicht entartete Fläche 2. Ordnung invariant lassen oder einen Kegel 2. Ordnung so in sich überführen, daß nur der Faktor $+1$ auftritt.

Beweis: Jeder durch $\alpha\beta$ oder $\bar{\alpha}\beta$ und $\alpha\bar{\beta}$ ersetzbare Typ läßt entweder eine nicht entartete Fläche 2. Ordnung oder einen Kegel invariant. Die beiden Ausnahmefälle führen dagegen höchstens ein Ebenenpaar in sich über. Umgekehrt folgt aus der Invarianz einer nicht entarteten Fläche oder eines Kegels $y^2_1 + y^2_2 \pm y^2_3 = 0$, der in $\lambda (x^2_1 + x^2_2 \pm x^2_3) = 0$ mit $\lambda = 1$ übergeht, für die Invarianten einer Projektivität notwendig entweder die Relation III oder IV des § 2. Diese Relationen sind aber hinreichend für die Ersetzbarkeit einer Projektivität, die eine nicht entartete Fläche 2. Ordnung oder einen Kegel 2. Ordnung invariant läßt.

§ 5: Das Produkt von zwei Ebenenspiegelungen.

Setzt man für die Invarianten einer Projektivität mit positiver Determinante die Gleichungen V in § 2 voraus, so lautet ihre charakteristische Gleichung: $\lambda^4 - \lambda^3 I + 2\lambda^2 (I-1) - \lambda I + 1 = 0$. Für die Wurzeln erhält man: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 \cdot \lambda_4 = 1$. Die Wurzeln der Typen (2), (3), (9), (10), (11), (13), (14), (15), (16), (19), (20) können solche Werte annehmen. Die spezialisierten Typen (2), (3), (9), (11), (13), (19) sind als Produkt von 2 Ebenenspiegelungen darstellbar.

Bei den Typen (10), (14), (15), (16), (20) sind die Relationen V des § 2 nicht hinreichend für die Ersetzbarkeit.

Beweis: Die Projektivitäten (10), (14), (15), (20) haben nur endlich viele Fixpunkte. Das Produkt von 2 Ebenenspiegelungen hat aber mindestens eine Gerade aus Fixpunkten. Die Abbildung (16) besitzt eine Gerade aus Fixpunkten, die zugleich der Träger eines Doppelebenenbüschels ist. Für keine Wahl der Zentren und Fixebenen von 2 Ebenenspiegelungen a, b lassen sich für das Produkt a b solche Fixelemente erreichen.

Jede Projektivität, die als Produkt von 2 Ebenenspiegelungen darstellbar ist, kann auch durch ein Produkt von 2 Geradenspiegelungen ersetzt werden.

Beweis: Die proj. Abbildungen, die ein Produkt von 2 Ebenenspiegelungen sind, kommen in § 4 unter den Typen vor, die durch 2 Geradenspiegelungen ersetzbar sind.

§ 6: Das Produkt von drei Ebenenspiegelungen.

Notwendig und hinreichend für die Ersetzbarkeit einer Projektivität mit negativer Determinante durch ein Produkt von 3 Ebenenspiegelungen ist das Bestehen der Relation VI des § 2 für ihre Invarianten.

Beweis: Die charakteristische Gleichung (3) § 2 lautet, wenn die Bedingung VI § 2 vorausgesetzt wird: $\lambda^4 - \lambda^3 I + \frac{1}{2}\lambda^2 (I^2 - K) - \frac{1}{2}\lambda (K - I^2 - 2I) - 1 = 0$. Daraus folgt für die Wurzeln: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 1$. Die charakteristischen Wurzeln der Typen (1), (2), (4), (8), (10), (12), (18) können solche Werte annehmen. Die Ersetzbarkeit dieser spezialisierten Typen durch ein Produkt von drei Ebenenspiegelungen folgt aus der Tatsache, daß jede ebene Projektivität als Produkt von 3 involutorischen Elementen darstellbar ist.[4])

[4]) Vgl. G. Thomsen: Grundlagen der Elementargeometrie.

§ 7: Die Ersetzbarkeit der allgemeinen Projektivität mit negativer Determinante.

Die Projektivitäten mit negativer Determinante lassen sich auf die Form der Typen (1), (2), (4), (8), (10), (12), (18) bringen.

Alle Projektivitäten mit negativer Determinante lassen sich als Produkt von einer Geradenspiegelung und drei Ebenenspiegelungen darstellen.

Beweis: Zu jeder Projektivität A mit negativer Determinante, die auf die Form eines der angegebenen Typen gebracht worden ist, läßt sich eine Geradenspiegelung α derart finden, daß für die Invarianten des Produktes α A in den Fällen (1), (2), (8), (10), (12), (18) die Relationen I des § 2 gelten und im Fall (4) die Relation VI § 2 erfüllt ist. Nach § 3 bezw. § 6 gilt dann: $\alpha A = \beta c$ bezw. $\alpha A = a\,b\,c$ und $A = \alpha\beta c$ bezw. $A = \alpha\,a\,b\,c$. Aus (5) § 1 geht hervor, daß jede Geradenspiegelung β sich als Produkt von 2 Ebenenspiegelungen darstellen läßt, d. h. aus: $A = \alpha\beta c$ folgt: $A = \alpha\,a\,b\,c$.

§ 8: Die Ersetzbarkeit der allgemeinen Projektivität mit positiver Determinante.

Alle Projektivitäten mit positiver Determinante sind als Produkt von drei Geradenspiegelungen α, β, γ darstellbar.

Beweis: Zu jedem Typ einer Projektivität A mit positiver Determinante läßt sich mit Ausnahme von (4) eine Ebenenspiegelung c derart angeben, daß für die Invarianten des Produktes Ac die Relationen I in § 2 gelten. Es gilt dann nach § 3: $Ac = \alpha\,b$ und $A = \alpha\,bc$. Daraus folgt nach § 5: $A = \alpha\beta\gamma$. Für Typ (4) besteht die Möglichkeit einer Darstellung in der Form $\alpha\,bc$ nicht. Multipliziert man ihn aber mit einer geeigneten Geradenspiegelung α, so erkennt man, daß sich das Produkt durch 2 Geradenspiegelungen β, γ ersetzen läßt.

Anhang.

Klassifikation der reellen räumlichen Projektivitäten.[5])

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

(1): $a \neq b \neq c \neq d$
(2): $a = b \neq c \neq d$
(3): $a = b \neq c = d$
(4): $a = b = c \neq d$
(5): $a = b = c = d$

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix}$$

(6): $b \neq 0$, $d \neq 0$, nicht zugleich: $a = c$, $b = |d|$
(7): $c = a$, $d = b \neq 0$

[5]) Vgl. Heffter: Lehrb. d. analyt. Geometrie, Bd. II, S. 111.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix} \quad (8): a \neq b,\ d \neq 0 \qquad (9): a = b,\ d \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \quad (10): a \neq b \neq c \qquad (11): a = b \neq c \qquad (12): a \neq b = c \qquad (13): a = b = c = 1$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -c \\ 0 & 0 & c & b \end{pmatrix} \quad (14): c \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (15): a \neq b \qquad (16): a = b = 1$$

$$\begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} \quad (17): b \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad (18): a \neq b \qquad (19): a = b = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Die Projektivitäten, welche sich bei Anwendung der Relationen: $K - I^2 = 0$ und $2L + I^3 - 3KI + 6I = 0$ auf die Typen der Projektivitäten ergeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & -1/a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1): a^2 \neq 1 \qquad (4): a = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -a \\ 0 & 0 & -a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8): b \neq 0,\ a^2 + b^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Die Projektivitäten, welche sich bei Anwendung der Relationen: $K - I^2 = 0$ und $2L + I^3 - 3KI - 6I = 0$ auf die Typen der Projektivitäten ergeben:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Die Projektivitäten, die sich bei Anwendung der Relation: $2L + I^3 - 3KI + 6I - 3(K - I^2) = 0$ auf die Typen der Projektivitäten ergeben:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/ab \end{pmatrix}$$ (1): alle Wurzeln versch. (2$_1$): $a = -1$, $b \neq \pm 1$ (4): $a = -1$, $b = 1$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a^2 \end{pmatrix}$$ (2$_2$): $a \neq \pm 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$ (8): $b \neq 0$, $c = \frac{1}{a^2 + b^2}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$ (10$_1$): $c \neq \pm 1$ (12): $c = 1$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ (10$_2$): $a \neq \pm 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ (18)

Die Projektivitäten, welche sich bei Anwendung der Relationen: $K - I^2 + 4I - 4 = 0$ und $2L + I^3 - 3KI - 6I = 0$ auf die Typen der Projektivitäten ergeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & -1/a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ (2): $a \neq \pm 1$ (3): $a = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -a \\ 0 & 0 & -a & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ (9): $b \neq 0$, $a^2 + b^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} \mp 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 1 & \mp 1 \end{pmatrix}$$ (11): Oberes Vorzeichen (13): Unteres Vorzeichen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ (19)

Nicht ersetzbar sind:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (10): a \neq \pm 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} \quad (14): b \neq 0, \; a^2+b^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (15): \text{Oberes Vorzeichen} \\ (16): \text{Unteres Vorzeichen} \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Die Projektivitäten, welche sich bei Anwendung der Relation: $2L+I^3-3KI-6I = 0$ auf die Typen der Projektivitäten ergeben:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1/b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1): \text{alle Wurz. versch.} \\ (2): a = 1, \; b \neq \pm 1 \\ (3_1): a = 1, \; b = -1 \\ (3_2): a = b \neq \pm 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & c \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (6_1): b \neq 0, \; d \neq 0, \\ a^2+b^2 = 1 \\ c^2+d^2 = 1 \\ \text{nicht zugl.: } a = c, b = |d| \\ (7): a = c, \; b = d \neq 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & -a \\ c & d & 0 & 0 \\ d & -c & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (6_2): d \neq 0, \\ a = \dfrac{c}{c^2+d^2} \\ b = \dfrac{d}{c^2+d^2} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -c \\ 0 & 0 & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (8): a \neq \pm 1, \; c \neq 0 \\ (9): a = 1 \quad c \neq 0 \\ \text{In beiden Fällen:} \\ b^2+c^2 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (10): a \neq \pm 1 \\ (11_1): a = -1 \\ (13): a = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (14): b \neq 0 \\ a^2+b^2 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^3 \\ 0 & 0 & -1/a^3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \\ 0 & 0 & -1/a^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (15_1)\text{: } a \neq \pm 1 \\ (16)\text{: } a = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (15_2)$$

$$\begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -a & a/2b & 1 \\ -a & b & 0 & a/2b \\ 0 & 0 & -b & a \\ 0 & 0 & a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2ab; & b^2-a^2; & -b/2+1/2b; & a/2 \\ b^2-a^2; & 2ab; & -a/2; & a^2/2b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (17)\text{:} \\ a^2+b^2=1 \\ b \neq 0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Nicht ersetzbar ist:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/a \end{pmatrix} \quad (11_2)\text{: } a \neq \pm 1$$

Die Projektivitäten, die sich bei Anwendung der Relation: $2L+I^3-3KI+6I = 0$ auf die Typen der Projektivitäten ergeben:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 1/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1/b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1)\text{: alle Wurzeln} \\ \text{verschieden} \\ (3)\text{: } a = b \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a & -b & 0 & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -d \\ 0 & 0 & d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & -a \\ 0 & 0 & a & b \\ d & c & 0 & 0 \\ -c & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (6)\text{: } d \neq 0,\ a = \dfrac{c}{c^2+d^2} \\ b = \dfrac{d}{c^2+d^2} \\ (7)\text{: } d = 1,\ c = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^3} & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 0 & a \\ 1 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Nicht ersetzbar ist:

$$\begin{Bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Lebenslauf.

Ich, Walter Otto Ernst Gensch, wurde am 15. August 1910 in Neu-Stuer in Meckl. als Sohn des Brennereiverwalters Richard Gensch und seiner Ehefrau Martha, geb. Richter, beide evgl.-luth. Religion und deutscher Staatsangehörigkeit, geboren. Meine Schulzeit verbrachte ich in Malchow, Plau, Berlin und Rostock, wo ich Ostern 1929 an der Oberrealschule die Reifeprüfung bestand. Anschließend studierte ich Mathematik, Physik und Chemie in Rostock, Berlin und Göttingen. Ich hörte u. a. bei den Herren Professoren: Bieberbach, Bodenstein, Frank, Furch, Füchtbauer, Hammerstein, Hettner, Herglotz, Thomsen, Schur und Walden.

Die vorliegende Arbeit hat mir mein hochverehrter, inzwischen verstorbener Lehrer Herr Prof. Dr. Thomsen übertragen. Herrn Prof. Dr. Furch verdanke ich es, daß ich sie zum Abschluß bringen konnte. Ferner danke ich Herrn Dr. Göritz für sein stetes Interesse.